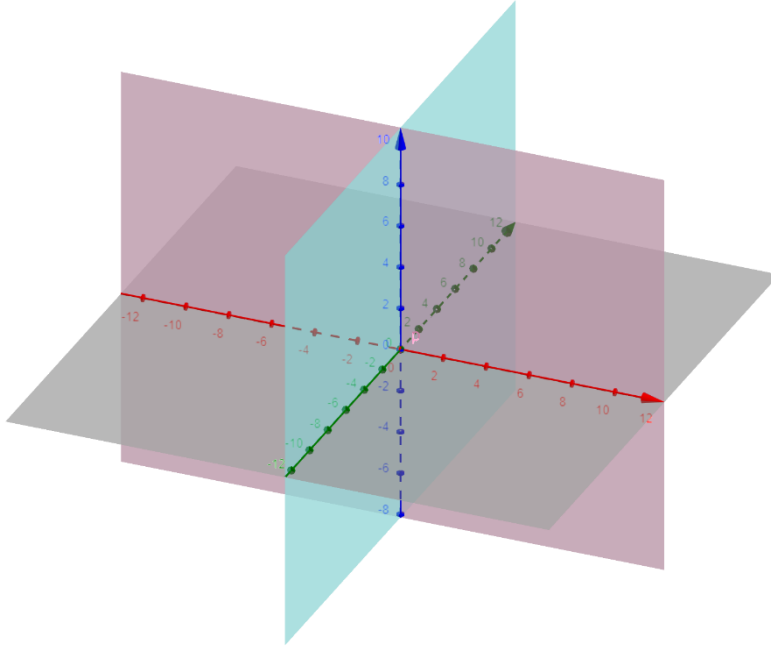


Ebenen im Raum – Parameterform

Während wir uns bisher in der Analysis nur in einer einzigen Ebene bewegt haben – der „Zeichenebene“ –, gibt es im Raum unendliche viele Ebenen. So wird z.B. durch die x_1 - und x_2 -Achse eine Ebene festgelegt – der „Boden“ des Koordinatensystems, die „Wände“ dagegen werden durch die x_2 - und x_3 -Achse bzw. die x_1 - und x_3 -Achse festgelegt:

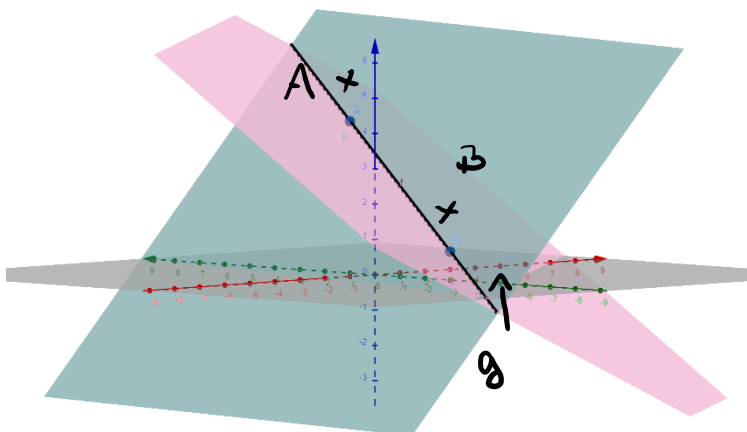


Genau wie Geraden gehen auch Ebenen unendlich weiter, wir sehen also immer nur einen kleinen Ausschnitt.

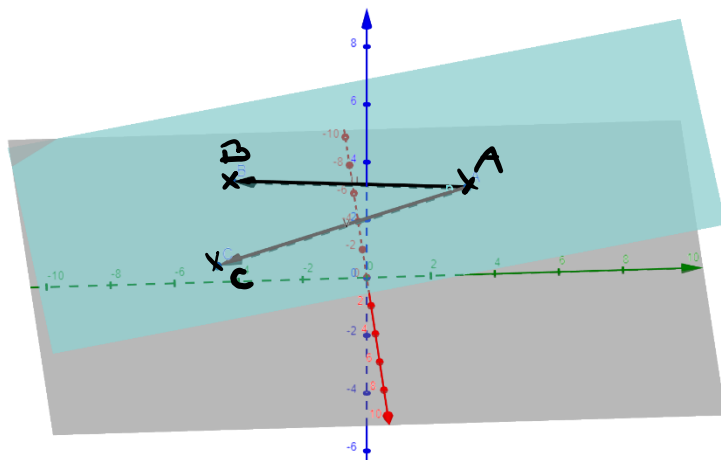
Ebenen können wir auf drei verschiedene Arten angeben; wir beginnen mit der Form, die ihr bereits von den Geraden kennt: der **Parameterform**.

Eine Gerade wird durch zwei Punkte A und B bzw. einen Stützvektor $\vec{p}$ und einen Richtungsvektor $\vec{u}$ festgelegt. Diese zwei Angaben reichen aus, um die Gerade eindeutig zu bestimmen. Allerdings reichen sie nicht aus, um eine Ebene festzulegen.

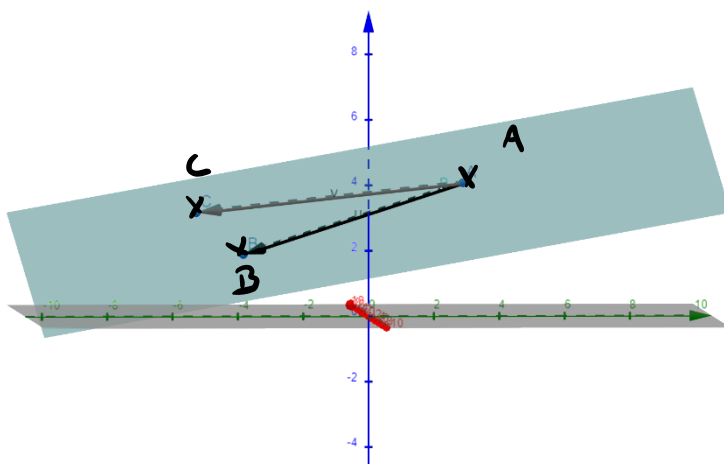
So gehen im folgenden Beispiel beide Ebenen durch die Gerade AB, auch im Koordinatensystem oben siehst du, dass eine Achse in unterschiedlichen Ebenen liegen kann. (Wie beim Rotationsvolumen könnt ihr euch hier vorstellen, dass eine „Ausgangsebene“ um die enthaltene Gerade rotiert.)



Sobald wir aber einen dritten Punkt angeben, der auf der Ebene liegt, ist sie eindeutig festgelegt. Ihr seht in den beiden folgenden Abbildungen der Ebene E, die zusätzlich zu den Punkten A und B auch noch den Punkt C enthält.

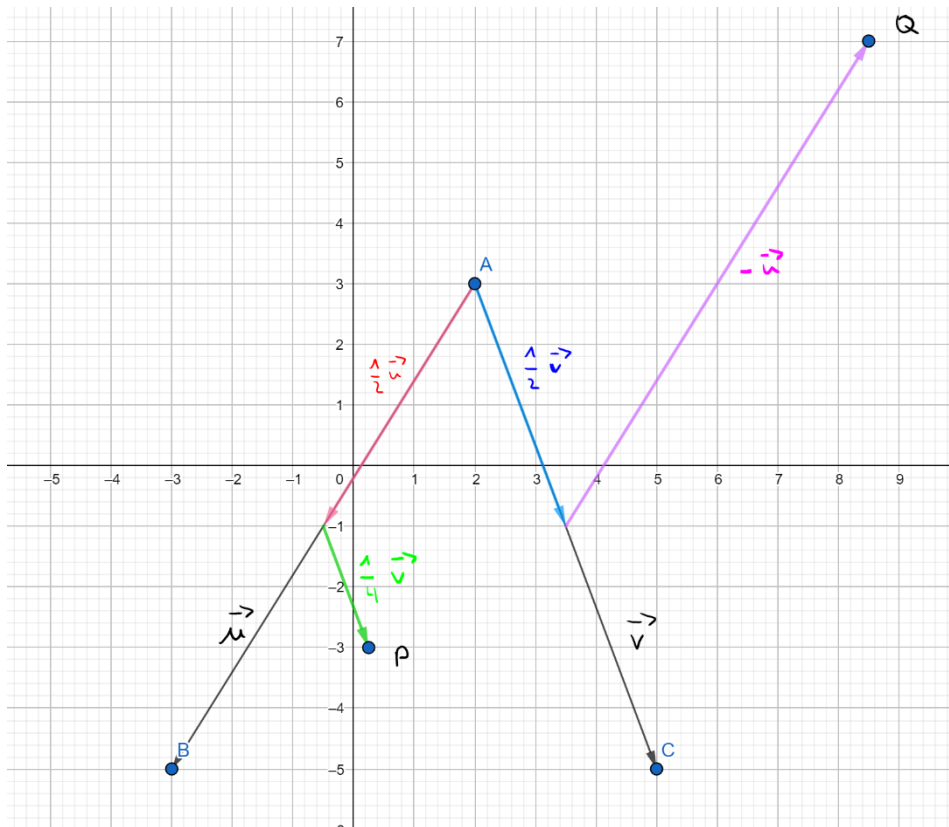


„von oben“



„von unten“

In der Zeichnung seht ihr auch die beiden Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$, auf denen die Ebene „liegt“ – vielleicht könnt ihr das ansatzweise an den beiden Ansichten erkennen. Diese beiden Vektoren können wir wie bei der Geraden nutzen, um eine Ebenengleichung aufzustellen. Betrachten wir dazu unsere Ebene von oben, sie liegt jetzt also in unserer Zeichenebene.



Jeder Punkt der Ebene kann – von A ausgehend – mit einer Kombination der beiden Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ erreicht werden. So ist hier z.B.: $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AA} + \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{4}\vec{v}$ und $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AA} + \frac{1}{2}\vec{v} - \vec{u}$.
Wir können also analog zur Geradengleichung die folgende Ebenengleichung aufstellen:

$$E: \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$$

Dabei sind r und s beliebige reelle Zahlen, $\vec{u}$ und $\vec{v}$ dürfen nicht der Nullvektor sein. Der Vektor $\vec{p}$ heißt auch hier **Stützvektor**, $\vec{u}$ und $\vec{v}$ heißen **Spannvektoren**. Man sagt auch: Die Ebene E wird von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aufgespannt. Die Gleichung heißt **Parameterform** der Ebene E .

Für die Ebene durch die Punkte A, B und C wäre also eine mögliche Gleichung:

$$E: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC}; \quad r, s \in \mathbb{R}$$

Beispiel:

Bestimme eine Parametergleichung der Ebene E , die durch die Punkte $A(2/3/1)$, $B(-2/-3/5)$ und $C(-4/2,5/7)$ festgelegt ist.

Lösung:
$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -0,5 \\ 6 \end{pmatrix}; \quad r, s \in \mathbb{R}$$

Tipp: Wenn ihr eine Ebene in Geogebra zeichnen wollt, verwendet ihr den Befehl Ebene(). In den Klammern gebt ihr dann wahlweise drei Punkte, Punkt und Vektoren usw. an – das wird euch angezeigt.