6 Ebenengleichungen umformen

Sehr häufig müsst ihr eine Ebenengleichung in eine der beiden anderen Formen umwandeln – je nachdem, welche Gleichung am besten zur Aufgabe passt. Darüber solltet ihr also möglichst nicht lange nachdenken müssen. Die Methoden kennt ihr alle schon, hier werden sie nur noch einmal zusammengefasst und geübt.
Nur selten muss man eine Koordinatengleichung in eine Parametergleichung umformen.
Um eine Normalengleichung in die parameterform umzuwandeln, sollte man den „Umweg" über die Koordinatengleichung wählen. (Generell muss man sowieso nur selten **in** die Parameterform umwandeln, diese ist für die meisten Rechnungen unpraktisch.)

Allgemeine Gleichungen / Bezeichnungen:

Parametergleichung: $E: \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$

Normalengleichung $E: (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0; \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} oder\ \vec{n} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Koordinatengleichung: $E: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$

Parametergleichung in Normalengleichung:

1. Normalenvektor $\vec{n}$ bestimmen mit $\vec{n} \perp \vec{u}\ und\ \vec{n} \perp \vec{v}$
2. mit Stützvektor $\vec{p}$ der Ebene und Normalenvektor $\vec{n}$ Normalengleichung aufstellen:
   $E: (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$

Normalengleichung in Koordinatengleichung:

1. Klammer ausmultiplizieren $\Rightarrow \quad \vec{x} \cdot \vec{n} - \vec{p} \cdot \vec{n} = 0$
2. $d = \vec{p} \cdot \vec{n}$ auf die rechte Seite bringen
3. Skalarprodukt auf beiden Seiten ausrechnen $\Rightarrow \quad E: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$

Koordinatengleichung in Normalengleichung

1. Koordinaten a, b, und c des Normalenvektors ablesen $\Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$
2. einen Punkt P auf E bestimmen (z.B. $x_1 = x_2 = 0$ setzen und x_3 ausrechnen)
3. mit Stützvektor $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ der Ebene und Normalenvektor $\vec{n}$ Normalengleichung aufstellen
   $\Rightarrow \; E: (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$

Koordinatengleichung in Parametergleichung

Einfachste Möglichkeit (mMn)

1. drei Punkte A, B, C auf E bestimmen (z.B. erst $x_1 = x_2 = 0$ setzen, dann $x_1 = x_3 = 0$, ...)
2. Ebenengleichung wie gewohnt aufstellen $\Rightarrow E: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC}$

Auch ´ne Möglichkeit:

1. Gleichung nach einer Koordinate auflösen, z.B. $x_3 \quad \Rightarrow \quad x_3 = d - \frac{a}{c}x_1 - \frac{b}{c}x_2$
2. $x_1 = r;\ x_2 = s$ setzen

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= 0 + r \cdot 1 + s \cdot 0 \\ x_2 &= 0 + r \cdot 0 + s \cdot 1 \\ x_3 &= d + r \cdot \left(-\frac{a}{c}\right) + s \cdot \left(-\frac{b}{c}\right) \end{aligned} \qquad \Leftrightarrow \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -a/c \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -b/c \end{pmatrix}$$

Parametergleichung in Koordinatengleichung

Möglichkeit 1: erst die Normalengleichung aufstellen, dann ausmultiplizieren (s.o.)

Möglichkeit 2:

1. Normalenvektor $\vec{n}$ bestimmen mit $\vec{n} \perp \vec{u}\ und\ \vec{n} \perp \vec{v}$
1. Koordinaten a, b, c und Koordinaten des Stützvektors für x_1, x_2, x_3 in die allgemeine Koordinatengleichung einsetzten und d ausrechnen
2. mit a, b, c, und d die Koordinatengleichung aufstellen

Beispielrechnungen

Beispiel 1

Die Ebene E ist durch die Punkte A (-2/1/3), B (1/2/-1) und C (7/7/1) festgelegt. Gib eine Parametergleichung, einen Normalengleichung und eine Koordinatengleichung von E an.

Lösung:

Parametergleichung: $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$

Normalengleichung:

1. Normalenvektor $\vec{n}$ bestimmen mit $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ und $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$

$$\begin{aligned} 3a + b - 4c &= 0 \\ 9a + 6b - 2c &= 0 \quad |\cdot 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 3a + \quad b - 4c &= 0 \\ -15a - 11b \quad &= 0 \end{aligned} \qquad -11b = 15a$$

Setze $a = t \quad \Rightarrow \quad b = -\frac{15}{11}t \quad \Rightarrow \ 3t - \frac{15}{11}t - 4c = 0 \quad \Rightarrow \ \frac{18}{11}t - 4c = 0$
$\Rightarrow \ -4c = -\frac{18}{11}t \quad \Rightarrow \quad c = \frac{18}{44}t = \frac{9}{22}t$

Für $t = 22$ erhalten wir $\vec{n} = \begin{pmatrix} 22 \\ -30 \\ 9 \end{pmatrix}$

2. Aus der Parametergleichung lesen wir ab: $\vec{p} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow\ E: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 22 \\ -30 \\ 9 \end{pmatrix} = 0$$

Koordinatengleichung

1. Klammer ausmultiplizieren: $\vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 22 \\ -30 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 22 \\ -30 \\ 9 \end{pmatrix} = 0$

2. umformen: $\vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 22 \\ -30 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 22 \\ -30 \\ 9 \end{pmatrix}$

3. ausrechnen: $E: 22x_1 - 30x_2 + 9x_3 = -47$

Beispiel 2
Gegeben ist die Ebene E mit $E: 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 15$. *Bestimme eine Normalengleichung und eine Parametergleichung von E.*

Lösung

Normalengleichung:

1. a, b und c ablesen: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

2. Punkt P auf E bestimmen:
$x_1 = x_2 = 0 \quad \Rightarrow\ 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 5x_3 = 15 \ \Leftrightarrow \quad 5x_3 = 15 \quad \Leftrightarrow \quad x_3 = 3 \quad \Rightarrow P\ (0|0|3)$

3. $\vec{n}$ und $\vec{p}$ einsetzen: $E: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$

Parametergleichung

Möglichkeit 1

1. erster Punkt siehe oben: $P\ (0|0|3)$
   zwei weitere Punkte auf E bestimmen:
   $x_1 = x_3 = 0 \quad \Rightarrow\ 2 \cdot 0 + 3 \cdot x_2 + 5 \cdot 0 = 15 \ \Leftrightarrow \quad 3x_2 = 15 \quad \Leftrightarrow \quad x_3 = 5\ \Rightarrow A\ (0|5|0)$

   $x_2 = x_3 = 0 \quad \Rightarrow\ 2 \cdot x_1 + 3 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 15 \ \Leftrightarrow \quad 2x_1 = 15 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 7{,}5\ \Rightarrow$
   $B\ (7{,}5|0|0)$

2. Ebenengleichung mit P, A und B aufstellen: $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 7{,}5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

Möglichkeit 2

Ebenengleichung nach einer Koordinate auflösen, ich wähle hier x_1:
$2x_1 = 15 - 3x_2 - 5x_3 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 7{,}5 - 1{,}5x_2 - 2{,}5x_3$

Setze $x_2 = r;\ x_3 = s$

$$\Rightarrow \begin{array}{lcl} x_1 & = & 7{,}5 + r \cdot (-1{,}5) + s \cdot (-2{,}5) \\ x_2 & = & 0 + r \cdot 1 + s \cdot 0 \\ x_3 & = & 0 + r \cdot 0 + s \cdot 1 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 7{,}5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$