V Lineare Gleichungen

1 Lösen von Gleichungen

Wie sich vor den Ferien schon bemerkbar gemacht hat, kehren wir der Geometrie den Rücken und fangen nun wieder an zu rechnen… Es bleibt aber dabei – die schwierigsten Themen dieses Schuljahrs haben wir bereits hinter uns. Und dementsprechend fangen wir auch ganz sanft an.

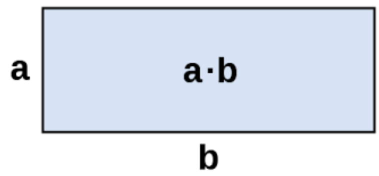
Schon in den letzten Jahren habt ihr immer wieder Gleichungen aufgestellt, z.B. bei der Berechnung von Flächeninhalten. Manchmal musstet ihr dabei auch bereits eine fehlende Größe berechnen.

Beispiel:

Ein Rechteck hat den die Seite a = 6 cm und den Flächeninhalt A = 24 cm². Wie lang ist die Seite b?

Lösung:

$A = a \cdot b$ *, also:* $24\,cm^2 = 6\,cm \cdot b$
Da ihr das 1x1 kennt, seht ihr die Lösung hier vermutlich schnell:
b = 4 cm, denn $6\,cm \cdot 4\,cm = 24\,cm^2$.



Leider werden die Gleichungen im Laufe der Zeit komplizierter (wie immer…), so dass die Lösung nicht mehr auf den ersten Blick zu erkennen ist. Deshalb werdet ihr in diesem Kapitel lernen, wie man systematisch vorgeht, um die Lösung zu finden.

Was ist ein Term?

Am Anfang des Schuljahres habt ihr bereits **Terme** (und Termumformungen) kennengelernt. Ein **Term** ist ein Rechenausdruck, also eine sinnvolle Verbindung von Zahlen und/oder Variablen und Rechenzeichen.
Beispiele dafür sind $2 - 5$; $x + 3$; $2x - y$; $x^2 + 3$

Der Term 2 – 5 hat den **Wert** -3; der Term x + 3 erhält aber erst einen Wert, wenn wir für die Variable x eine Zahl einsetzen. Für x = 1 hat der Term z.B. den Wert 4.

Was ist eine Gleichung?

Eine Gleichung ist zunächst einmal einfach ein mathematischer Ausdruck mit einem Gleichheitszeichen, z.B.

$$2 = 2$$
$$3 = 5$$
$$7 = 10 - 3$$
$$3x = 6 \ldots$$

Beide Seiten der Gleichung müssen denselben Wert haben, sonst entsteht eine falsche Aussage:

$2 = 2$	wahre Aussage
$3 = 5$	falsche Aussage $\Longrightarrow 3 \neq 5$!
$7 = 10 - 3$	wahre Aussage
$3x = 6$	?

Über die letzte Gleichung können wir nichts sagen, weil der Term auf der linken Seit für jede Zahl, die wir für x einsetzen, einen anderen Wert hat. Das Gleichheitszeichen ist hier sozusagen als „Wunsch" zu verstehen: Linke und rechte Seite sollen gleich sein.

Beim Lösen einer Gleichung versuchen wir herauszubekommen, welche Zahl wir für de Variable einsetzen müssen, damit eine wahre Aussage entsteht. Diese Zahl heißt **Lösung** der Gleichung.
Die Lösungen einer Gleichung werden in der **Lösungsmenge** zusammengefasst.

Betrachten wir weiter die Gleichung $3x = 6$:

0 ist keine Lösung der Gleichung, denn $3 \cdot 0 \neq 6$.
1 ist keine Lösung der Gleichung, denn $3 \cdot 1 \neq 6$.
2 ist eine Lösung der Gleichung 3x = 6, denn $3 \cdot 2 = 6$.
Die Lösungsmenge dieser Gleichung ist L = {2}.

Hinweis:
In den nächsten Schuljahren werden wir sehen, dass eine Gleichung auch mehrere Lösungen haben kann. So hat die Gleichung $x^2 = 4$ *die Lösungen 2 und -2, denn:* $2^2 = 4$ ***und*** $(-2)^2 = 4$.
Die Lösungsmenge dieser Gleichung ist also L = {-2; 2}.

Um zu überprüfen, ob eine Zahl wirklich die Lösung einer Gleichung ist, kann man die **Probe** machen. Dabei setzt man die Zahl in die ursprüngliche Gleichung ein, rechnet beide Seiten aus und entscheidet, ob eine wahre oder falsche Aussage vorliegt.

Beispiel:

Line hat berechnet, dass 4 eine Lösung der Gleichung $x^2 = 3x + 4$ *ist. Hat sie richtig gerechnet?*

Probe:

Linke Seite: $4^2 = 16$
Rechte Seite: $3 \cdot 4 + 4 = 12 + 4 = 16$

$\Rightarrow$ *4 ist eine Lösung der Gleichung, denn* $4^2 = 3 \cdot 4 + 4$ *ist wahr.*

Arbeitsauftrag:

1. Schreibe den Kasten auf. S. 86 in den Regelheft. (Große Überschrift: V Lineare Gleichungen, kleine Überschrift: 1 Lösen von Gleichungen)

2. Bearbeite die folgenden Aufgaben aus dem Buch:
   S. 87, Nr. 2 +3 + 5 + 6

3. Freiwillig: S.87, Nr. 8 + 11

2 Äquivalenzumformungen von Gleichungen

Meistens ist „Ausprobieren“ kein sinnvoller Weg, um die Lösung zu finden. Wenn man Pech hat, setzt man immer die falschen Zahlen ein, braucht deswegen sehr lange oder findet die Lösung gar nicht.
Um das Verfahren, das wir in Zukunft anwenden wollen, zu erklären, betrachten wir folgendes Zahlenrätsel:

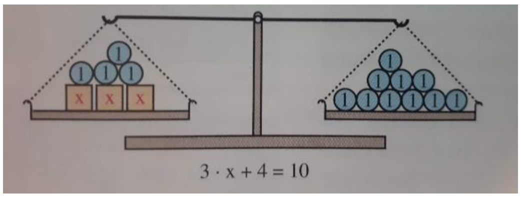
Ich denke mir eine Zahl x. Wenn ich die Zahl mit 3 multipliziere und dann 4 addiere, erhalte ich 10. Welche Zahl meine ich?

Schreiben wir dieses Rätsel mit Hilfe von Termen auf, sieht es folgendermaßen aus:

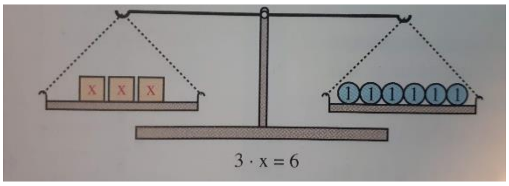
(1) Ich denke mir eine Zahl x:	x
(2) Ich multipliziere sie mit 3:	$3 \cdot \mathrm{x}$
(3) Dann addiere ich 4:	$3 \cdot \mathrm{x} + 4$
(4) Ich erhalte 10:	$3 \cdot \mathrm{x} + 4 = 10$

Den Weg zur Bestimmung der Lösungsmenge kann man auf unterschiedliche Arten veranschaulichen.

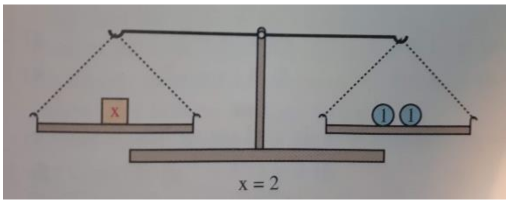
Häufig wählt man eine Waage. Da beide Seiten der Gleichung den gleichen Wert haben sollen, kann man sie mit zwei Waagschalen vergleichen, die immer gleich schwer sein sollen.
Wir denken uns drei unbekannte Gewichtsstücke links auf der Waage (x), außerdem noch links 4 und rechts 10 „Einer-Gewichte“. Die Waage ist dann im Gleichgewicht.



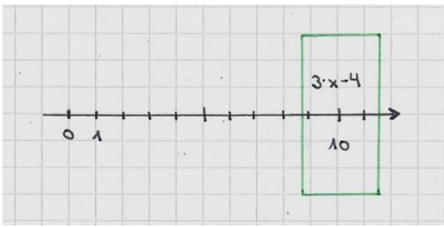
Wir nehmen auf beiden Seiten vier weg. Die Waage bleibt im Gleichgewicht.



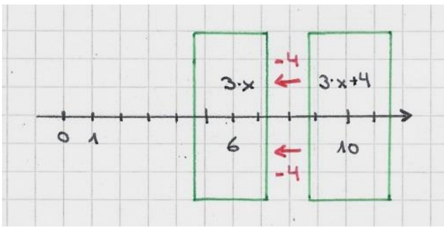
Auf beiden Waagschalen teilen wir durch 3. Die Waage bleibt immer noch im Gleichgewicht.



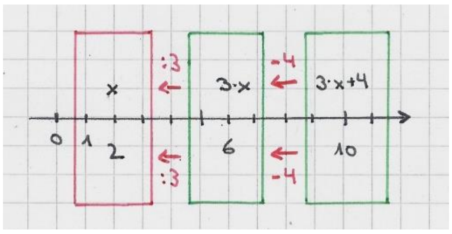
Eine andere Möglichkeit ist die Zahlengerade.
Die gesuchte Zahl x liegt irgendwo auf der Zahlengerade, wo, wissen wir aber nicht. Doch wir wissen, dass $3x + 4 = 10$ ist. Wir bestimmen x durch Rückwärtsrechnen.



Dann muss aber $3x = 6$ sein (Rückwärtsrechnen auf beiden Seiten: Subtrahieren von 4):



Wenn aber das Dreifache von x gleich 6 ist, dann muss x = 2 sein (Rückwärtsrechnen auf beiden Seiten: Dividieren durch 3).



Damit die Waage nicht aus dem Gleichgewicht gerät, ist es wichtig, dass wir auf beide Seiten immer dasselbe machen. Wir nehmen zuerst das gleiche Gewicht weg und teilen dann durch dieselbe Zahl.

Wir hätten auch auf beiden Seiten das Gewicht verdoppeln oder auf beiden Seiten 2 kg dazu geben können – am Gleichgewicht hätte das nichts geändert.

Dieses Verfahren können wir auf Gleichungen übertragen. Im folgenden Beispiel verändern wir die Ausgangsgleichung, indem wir bei jedem Schritt mit beiden Seiten der Gleichung dasselbe machen.
Nach jedem Schritt kann man überprüfen, ob sich die Lösungen der Gleichung verändert hat.

$x = 4$		Die Lösung ist 4, denn 4 = 4.
	Wir verdoppeln beide Seiten.	
$2x = 8$		Die Lösung bleibt gleich, denn $2 \cdot 4 = 8$.
	Wir verzehnfachen beide Seiten.	
$20x = 80$		Die Lösung bleibt gleich, denn $20 \cdot 4 = 80$.
	Wir ziehen von beiden Seiten 10 ab.	
$20x - 10 = 70$		Die Lösung bleibt gleich, denn $20 \cdot 4 - 10 = 70$.
	Wir halbieren beide Seiten.	
$10x - 5 = 35$		Die Lösung bleibt gleich, denn $10 \cdot 4 - 5 = 35$.

Umformungen, bei denen sich die Lösungsmenge einer Gleichung nicht ändert, heißen **Äquivalenzumformungen.** Der Name kommt, wie so oft, aus dem Lateinischen; äquivalent bedeutet „gleichwertig". Gleichungen, die durch Äquivalenzumformungen auseinander hervorgehen, sind gleichwertig, also **äquivalent**.

Die Lösung einer Gleichung ändert sich nicht, wenn man

- auf beiden Seiten dieselbe Zahl oder denselben Term addiert oder subtrahiert,
- beide Seiten mit derselben Zahl multipliziert oder durch dieselbe Zahl dividiert, wobei diese Zahl nicht Null sein darf.

! **Achtung: Die Multiplikation mit 0 ist keine Äquivalenzumformung!**

Lösen einer Gleichung mit Äquivalenzumformungen

Wie hilft uns das jetzt aber beim Lösen einer Gleichung?
Das Problem bei einer Gleichung ist ja meistens, dass das x nicht alleine steht, sondern lauter Zahlen um sich herum stehen hat – sonst könnte man die Lösung schließlich einfach ablesen, wie oben bei der Gleichung x = 4.
Diese störenden Zahlen entfernen wir nacheinander mit Hilfe von Äquivalenzumformungen. Wir rechnen sozusagen rückwärts, bis das x wieder alleine steht: Wurde eine Zahl zu x addiert, ziehen wir sie ab. Wurde x mit einer Zahl multipliziert, teilen wir durch diese Zahl usw.

Wieder lässt sich das am besten an einem Beispiel erklären.

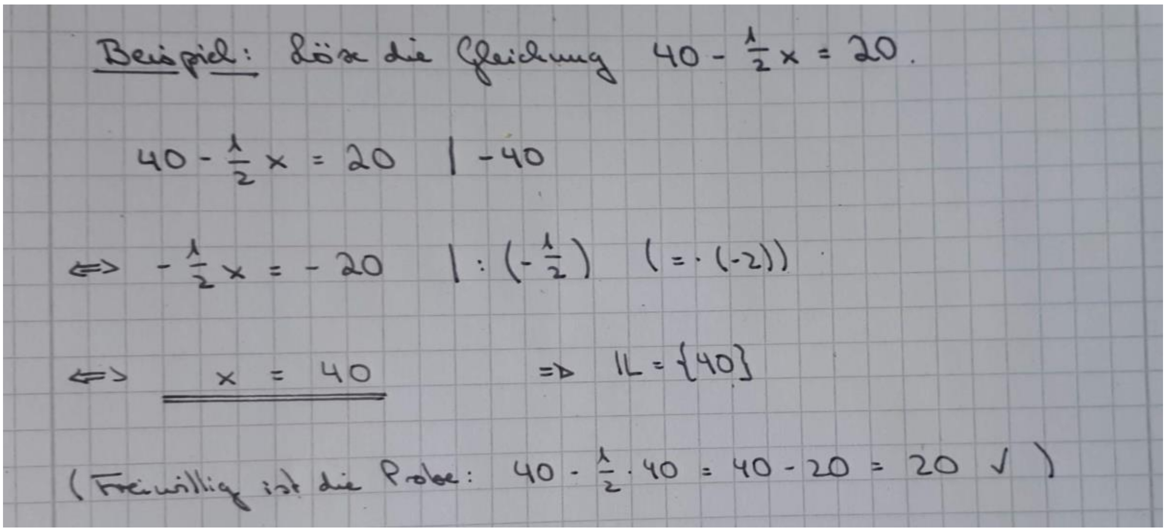
Beispiel:
Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung $7x + 60 = -10$.

$7x + 60 = -10$	$\mid -60$	Wir ziehen von beiden Seiten 60 ab.
$\Leftrightarrow \quad 7x = -70$	$\mid :7$	Wir teilen beide Seiten durch 7.
$\Leftrightarrow \quad x = -10$		Die Lösung ist -10.

Probe:
$7 \cdot (-10) + 60 = -10$ | | Wahre Aussage $\Rightarrow L = \{-10\}$

- Die Umformungen, die durchgeführt werden, schreibt man hinter einen senkrechten Strich. Dies gilt dann für beide Seiten der Gleichung.
- Jede neue Gleichung kommt in eine neue Zeile.
- Der Doppelpfeil vor den veränderten Gleichungen bedeutet, dass die Gleichungen äquivalent sind, dass sich also die Lösungsmenge durch unsere Umformungen nicht geändert hat.

Handschriftlich sieht das genauso aus – und an die üblichen Verdächtigen: Auch, wenn ihr die Lösung bei den Übungsaufgaben sofort sehr, schreibt ihr euren Lösungsweg bitte schrittweise auf, denn genau darum geht es in diesem Kapitel.



Beispiel: Löse die Gleichung $40 - \frac{1}{2}x = 20$.

$40 - \frac{1}{2}x = 20 \quad | -40$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}x = -20 \quad | : \left(-\frac{1}{2}\right) \quad (= \cdot (-2))$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 40}} \quad \Rightarrow \mathbb{L} = \{40\}$

(Freiwillig ist die Probe: $40 - \frac{1}{2} \cdot 40 = 40 - 20 = 20$ ✓)

Arbeitsauftrag:

1. Schreibe den Kasten auf S. 89 in dein Regelheft (Überschrift: 2 Äquivalenzumformungen von Gleichungen)

2. Bearbeite die folgenden Aufgaben von der nächsten Seite:
   Nr. 6
   Nr. 7 oder Nr. 9
   Nr. 11 a bis f

6. Maltes Rechnungen wurden von einem Mitschüler durchgestrichen.
Welche Fehler hat Malte gemacht?
Veranschauliche deine Begründung auch an einer Waage. Korrigiere Maltes Rechnung.

$$4x = 18$$
$$x = 14$$

$$3x + 6 = 21$$
$$x + 6 = 7$$
$$x = 1$$

7. Begründe, warum die Gleichungen zueinander äquivalent sind.

a) $4x + 9 = 21$
$4x = 12$
$x = 3$

b) $7x - 5 = -26$
$7x = -21$
$x = -3$

c) $-20x - 10 = 0$
$-20x = 10$
$x = -\frac{1}{2}$

d) $10x + 8 = 38$
$10x = 30$
$x = 3$

8. Multipliziere beide Seiten der Gleichung $5x = -15$ **a)** mit $\frac{4}{5}$; **b)** mit $-4{,}2$; **c)** mit 0.
Notiere die neue Gleichung. Ist diese zu der ursprünglichen äquivalent? Begründe.

9. Welche der folgenden Gleichungen sind äquivalent zueinander? Begründe.

a)
$3x = 7$ $\quad$ $3x + 2 = 9$ $\quad$ $3x + 2 = 7$ $\quad$ $3x + 7 = 12$ $\quad$ $3x + 2 = 5$ $\quad$ $6x + 4 = 18$ $\quad$ $6x = 14$

b)
$x^2 + x = 2$ $\quad$ $x^2 + x + 4 = 6$ $\quad$ $x^2 + x - 2 = 0$ $\quad$ $2x^2 + 2x = 4$ $\quad$ $-3x^2 - 3x = 0$ $\quad$ $x^2 + x = 0$

10. Schreibe zu der Gleichung eine äquivalente Gleichung.

a) $8x + 10 = 34$ $\quad$ **b)** $11y - 8 = 47$ $\quad$ **c)** $20x + 40 = 0$ $\quad$ **d)** $6z + 1 = -23$

11. Bestimme die Lösungsmenge.

a) $8x + 10 = 34$ $\quad$ **d)** $2x + 5 = -5$ $\quad$ **g)** $-7x + 15 = 50$

b) $3x + 4 = 25$ $\quad$ **e)** $2x - 5 = 5$ $\quad$ **h)** $37 = 9x + 1$

c) $5x - 12 = 8$ $\quad$ **f)** $-2x - 5 = -5$ $\quad$ **i)** $7b + 60 = -10$

$3z + 2 = -4 \quad | -2$
$3z = -6 \quad | :3$
$z = -2$

Probe für -2:

$3 \cdot (-2) + 2 = -4$ (w?)	
L.S.: $3 \cdot (-2) + 2$ $= -4$	R.S.: -4

Lösungsmenge $L = \{-2\}$

12. Löse das Zahlenrätsel mithilfe einer Gleichung.

a) Addiert man 17 vom 5-fachen der Zahl, so erhält man 52.

b) Subtrahiert man 5 vom Doppelten einer Zahl, so erhält man das Dreifache der Zahl.

c) Addiert man das 3-fache der Zahl zu 37, so ergibt sich 19.