Lösungen M1 - 20.4.20

S. 189, Nr. 1

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}; \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 4 + 0 \cdot 3 + (-2) \cdot 2 = 4 - 4 = 0$

$\vec{a} \cdot \vec{c} = 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + (-2) \cdot 3 = -1 - 6 = -7$

$\vec{b} \cdot \vec{c} = \cancel{1 \cdot 4 + 0 \cdot 3 + (-2) \cdot 2 = 4}\ 4 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = -4 + 3 + 6 = 5$

S. 189, Nr. 2a

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow g \perp h\ ?$

$\Rightarrow \vec{u} \perp \vec{v}\ ?$

$\Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot 6 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 0$

$\Rightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \underline{\underline{g \perp h}}$

S. 189, Nr. 3a+b

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{b} \Rightarrow a_1 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 3 \cdot 1 \overset{!}{=} 0$

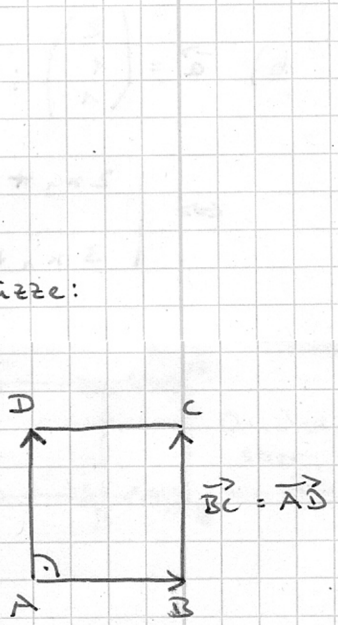
$a_1 + 1 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \underline{\underline{a_1 \overset{!}{=} -1}}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ b_2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow 2 \cdot 2 + 5 b_2 + 4 \cdot (-1) \overset{!}{=} 0$

$5 b_2 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \underline{\underline{b_2 \overset{!}{=} 0}}$

S. 189, Nr. 6

$A(-2|2|3);\ B(2|10|4);\ D(5|-2|7);\ C = ?$ Skizze:



Damit ABCD ein Quadrat sein kann, müssen die Seiten gleich lang und orthogonal sein. Außerdem muss gelten: $\vec{OC} = \vec{OB} + \vec{AD}$.

Überprüfung: (1) $|\vec{AB}| = |\vec{AD}|$? → b.w.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2-(-2) \\ 10-2 \\ 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{16+64+1} = 9$$

$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 5-(-2) \\ -2-2 \\ 7-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow |\overrightarrow{AD}| = \sqrt{49+16+16} = 9 \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD}|$$

(2) $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$?

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 4 \cdot 7 + 8 \cdot (-4) + 1 \cdot 4 = 28 - 32 + 4 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{C(9|6|8)}}$$

S. 190, Nr. 9

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\vec{x} \perp \vec{a}$ und $\vec{x} \perp \vec{b}$

$\Leftrightarrow \vec{x} \cdot \vec{a} = 0$ und $\vec{x} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \left| \begin{array}{r} 0 \cdot x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_3 = 0 \end{array} \right|$

$\Rightarrow x_3 = 0 \Rightarrow$ in I: $2x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$

Über x_1 ist nichts bekannt, ist also beliebig wählbar

$\Rightarrow x_1 = t$ mit $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; also z. B. $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{x} \cdot \vec{a} = 0$ und $\vec{x} \cdot \vec{b} = 0$

$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} \cdot 2 \\ - \end{array} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{array} \right|$

aus II: $x_1 = x_2$; Setze $x_2 =: t \Rightarrow x_1 = t$.

in I: $2t + t + x_3 = 0 \Leftrightarrow x_3 = -3t$

$\Rightarrow$ z. B. $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$