

5 Normalengleichung und Koordinatengleichung einer Ebene

So anschaulich die Parametergleichung der Ebene auch ist – euch werden viele Aufgaben begegnen, für die sie einfach unpraktisch ist. Deswegen lernt ihr noch zwei weitere Möglichkeiten kennen, eine Ebene eindeutig zu beschreiben: die Normalengleichung und die Koordinatengleichung.

Die Normalengleichung

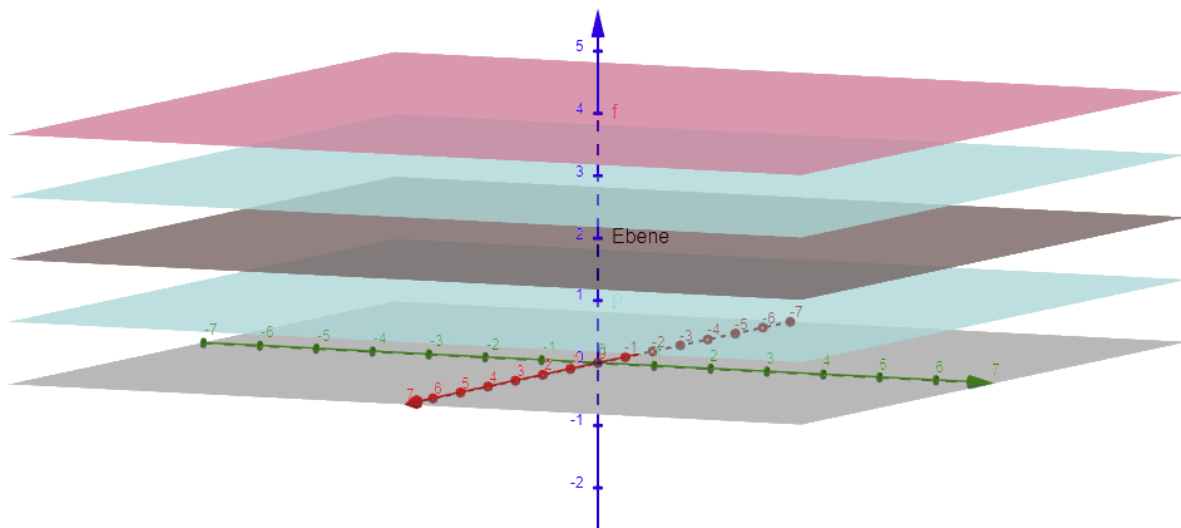
Das Prinzip der Normalengleichung ist relativ einleuchtend und lässt sich am Beispiel eines Tisches erklären. Wir wählen also als Beispielebene eine Tischplatte (von einem ganz normalen, durchschnittlichen Tisch – ein Designer-Objekt ist nicht hilfreich).

Die Lage der Tischplatte kann durch zwei Angaben eindeutig festgelegt werden:

- (1) Sie ist orthogonal zum Tischbein.
- (2) Sie verläuft in einer bestimmten Höhe.



Mit der ersten Angabe erhalten wir unendlich viele Ebenen, die aber alle parallel zueinander sind. Im folgenden Beispiel ist die x_3 -Achse unser Tischbein, die vier übereinander liegenden Ebenen mögliche Tischplatten, die alle orthogonal zum Tischbein sind.

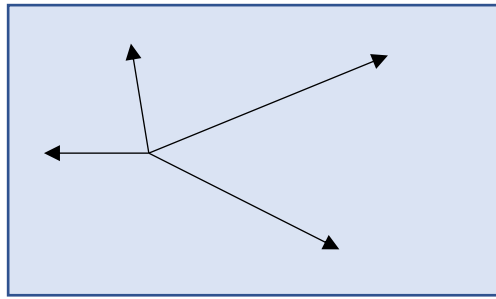


Die Angabe eines einzigen Punktes auf der Ebene reicht jetzt, um zu wissen, um welche der zahlreichen Ebenen es sich handelt. Durch den Punkt $(0/0/4)$ verläuft z.B. nur die oberste Ebene in der Skizze. (Zur Erinnerung: Parallele Ebenen haben keine gemeinsamen Punkte.)

Damit wissen wir also: Nur die oberste Ebene kann unsere Tischplatte sein.

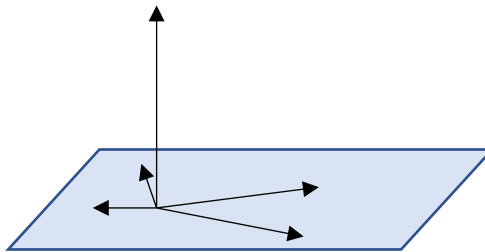
So viel zum Prinzip – um daraus jetzt eine Gleichung zu machen, brauchen wir Vektoren.

Wir betrachten dafür zunächst einen Ausschnitt unserer Ebene von oben und legen einen Punkt P fest. Dieser wird unser Stützvektor. Von P aus können zu jedem beliebigen Punkt X auf unserer Ebene einen Vektor zeichnen ($\overrightarrow{PX_1}$, $\overrightarrow{PX_2}$ usw.).



Die Vektoren haben alle eines gemeinsam: Sie sind orthogonal zu einem Vektor, der aus der Ebene direkt auf uns zukommt. Dieser orthogonale Vektor heißt Normalenvektor $\vec{n}$.

Hier seht ihr das Ganze von der Seite:



Im Beispiel gilt: $\overrightarrow{PX_1} \perp \vec{n}$; $\overrightarrow{PX_2} \perp \vec{n}$; $\overrightarrow{PX_3} \perp \vec{n}$. Das könnten wir für jeden Punkt X genauso feststellen, allgemein gilt also für jeden Punkt X unserer Ebene E: $\overrightarrow{PX} \perp \vec{n}$.

Aus dem letzten Kapitel wissen wir, welche Bedingung zwei orthogonale Vektoren erfüllen:

Zwei Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind genau dann orthogonal, wenn gilt: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Übertragen wir dies auf unsere Ebene:

Für jeden Punkt X einer Ebene gilt: $\overrightarrow{PX} \cdot \vec{n} = 0$, also $(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$.

Damit ist unsere Ebene eindeutig beschrieben – und wir haben unsere Normalengleichung 😊

Alle Punkte X, die auf der Ebene liegen, erfüllen diese Gleichung, und umgekehrt liegen alle Punkte X, die diese Gleichung erfüllen, auf der Ebene.

Jede Ebene E lässt sich beschreiben durch die Normalengleichung

$$E: (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$$

Mit einem Stützvektor $\vec{p}$ und einem Normalenvektor $\vec{n}$.

Beispiel:

Der Punkt $P(7/2/-1)$ liegt auf der Ebene E ; der Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor dieser Ebene.

Gib eine Normalengleichung von E an.

Lösung:

Wir setzen $\overrightarrow{OP}$ und $\vec{n}$ in die allgemeine Normalengleichung ein: $E: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

Die Koordinatengleichung

Die Koordinatengleichung kommt als einzige ohne Vektoren aus und enthält stattdessen – wie der Name schon erahnen lässt – Koordinaten. Sie entsteht, indem man die Normalengleichung umformt:

Wir betrachten eine Ebene E und gehen von der allgemeinen Normalengleichung mit dem

Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ aus:

$$(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$$

Wir multiplizieren die Klammer aus.

$$\Leftrightarrow \vec{x} \cdot \vec{n} - \vec{p} \cdot \vec{n} = 0$$

$$| + \vec{p} \cdot \vec{n}$$

$$\Leftrightarrow \vec{x} \cdot \vec{n} = \vec{p} \cdot \vec{n}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Skalarprodukt

$$\Leftrightarrow ax_1 + bx_2 + cx_3 = ap_1 + bp_2 + cp_3$$

Die Koordinaten von $\vec{n}$ und $\vec{p}$ sind (häufig bekannte) Zahlen, also ist auch $d = ap_1 + bp_2 + cp_3$ eine reelle Zahl.

$$\Leftrightarrow ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$$

Also:

Jede Ebene lässt sich beschreiben durch eine Koordinatengleichung

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = d,$$

bei der mindestens einer der Koeffizienten a , b und c ungleich 0 ist.

Ist $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ eine Koordinatengleichung der Ebene E , so ist der Vektor $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor von E .

Beispiel 1:

Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene E: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$.

Lösung:

$$\begin{aligned} & \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \\ \Leftrightarrow & \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & -2x_1 + 3x_2 - x_3 = 7 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) \\ \Leftrightarrow & -2x_1 + 3x_2 - x_3 = -7 \end{aligned}$$

Beispiel 2:

Gib eine Normalengleichung der Ebene mit E mit E: $4x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 12$ an.

Lösung:

(1) Bestimmen eines Stützvektors $\vec{p}$

Dafür muss ein Punkt P finden, der auf der Ebene liegt. Die Koordinaten von P müssen also die Gleichung erfüllen. Anstatt herumzuprobieren, ist es sinnvoll, zwei der Koordinaten gleich null zu setzen und dann die dritte zu berechnen, also z.B. $x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow 4 \cdot 0 - 3 \cdot 0 - 2x_3 = 12$.

Dann gilt $-2x_3 = 12$, also $x_3 = -6 \Rightarrow P(0/0/-6) \Rightarrow \vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$

(2) Bestimmen des Normalenvektors

Die Koeffizienten aus der Koordinatengleichung sind die Koordinaten eines Normalenvektors, man

kann sie also einfach ablesen: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow E: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = 0.$$