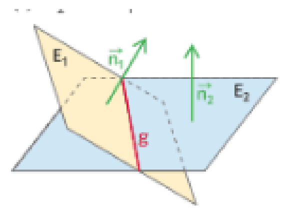
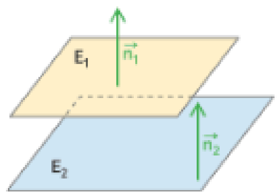
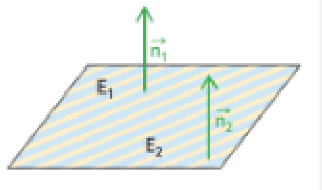
9 Gegenseitige Lage von Ebenen

Auch für die Lagebeziehungen zweier Ebenen E_1 mit dem Normalenvektor $\overrightarrow{n_1}$ und E_2 mit dem Normalenvektor $\overrightarrow{n_2}$ gibt es drei Möglichkeiten:

		
E_1 und E_2 schneiden sich in einer Schnittgeraden g	E_1 und E_2 sind zueinander parallel und haben keine gemeinsamen Punkte	E_1 und E_2 sind zueinander parallel und identisch.

Zwei Ebenen sind genau dann zueinander parallel, wenn ihre Normalenvektoren parallel, also Vielfache voneinander, sind.

! Zwei Ebenen können **nicht zueinander windschief** sein.

Zwei Ebenen in Parameterform gleichzusetzen, führt zu einem LGS mit vier Variablen und damit zu einem hohen Rechenaufwand (und dementsprechend vielen Fehlerquellen). Deshalb empfiehlt es sich hier noch mehr als im vorigen Kapitel, die Ebenen ggf. zunächst in die Koordinatenform umzuwandeln.

Beispiel 1

Bestimme die gegenseitige Lage der Ebenen $E_1\colon 6x_1 - x_2 + x_3 = 6$ und $E_2\colon 2x_1 + x_2 - x_3 = -2$.

1. Schritt: Sind E_1 und E_2 parallel?

Wir überprüfen zunächst, ob die Normalenvektoren Vielfache voneinander sind, d.h. ob gilt:

$$\overrightarrow{n_1} = k \cdot \overrightarrow{n_2}\,.$$

$$\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix};\ \overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{rcl} 6 &=& k \cdot \ \ 2 \\ -1 &=& k \cdot \ \ 1 \\ 1 &=& k \cdot (-1) \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{rcr} k &=& 3 \\ k &=& -1 \\ k &=& -1 \end{array} \right| \ \lightning$$

$\Rightarrow$ Man erkennt: Es gibt keine $k \in \mathbb{R}$, so dass gilt: $\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,

Man schreibt vereinfacht (und man muss i.d.R. die Rechnung auch nicht ausführlich hinschreiben!):

$$\overrightarrow{n_1} \neq k \cdot \overrightarrow{n_2}$$

Die Ebenen schneiden sich demnach und es gibt eine Schnittgerade g.

2. Schritt: Bestimmung der Schnittgerade

Wir stellen ein LGS aus den beiden Ebenengleichungen auf und lösen es:

$$\left| \begin{array}{lcr} 6x_1 - x_2 + x_3 & = & 6 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 & = & -2 \end{array} \right|$$

$$6x_1 - x_2 + x_3 = 6 \qquad \Rightarrow \; 3 - x_2 + x_3 = 6 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 3 + x_2$$

$$8x_1 = 4 \qquad \Rightarrow \; x_1 = \frac{1}{2}$$

Setze $x_2 = t$, damit gilt: $x_1 = \frac{1}{2};\ x_2 = t;\ x_3 = 3 + t$.

Dies sind die Koordinaten aller gemeinsamen Punkte von E_1 und E_2, also aller gemeinsamen Punkte der Schnittgeraden. In der Vektorschreibweise führt uns das zur Geradengleichung:

$$\begin{array}{lcccc} x_1 & = & \frac{1}{2} & + & t \cdot 0 \\ x_2 & = & 0 & + & t \cdot 1 \\ x_3 & = & 3 & + & t \cdot 1 \end{array} \qquad \Rightarrow \; g\colon\; \vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel 2

Bestimme die gegenseitige Lage der beiden Ebenen $E_1\colon 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -7$ und $E_2\colon 8x_1 + 6x_2 - 4x_3 = -15$.

1. Schritt: Sind E_1 und E_2 parallel?

Wir überprüfen zunächst, ob die Normalenvektoren Vielfache voneinander sind, d.h. ob gilt:

$$\overrightarrow{n_1} = k \cdot \overrightarrow{n_2}$$

$$\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix};\ \overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ E_1 und E_2 sind parallel.

2 . Schritt: Sind E_1 und E_2 verschieden oder identisch?

Wenn zwei Ebenen identisch sind, müssen ihre Koordinatengleichungen zueinander äquivalent sein, also z.B. durch Multiplikation mit einer Zahl auseinander hervorgehen (z.B. $E_1 = k \cdot E_2$) .Das ist hier nicht der Fall.

$\Rightarrow$ E_1 und E_2 sind parallel und nicht identisch.