

2 Abstand eines Punktes von einer Geraden

Zur Erinnerung:

Um den Abstand eines Punktes R zur Ebene E zu bestimmen, fällt man das Lot von R auf E , d.h. man „zieht“ gerade durch R , die orthogonal zu E ist. Der Richtungsvektor von g ist also der Normalenvektor von E .

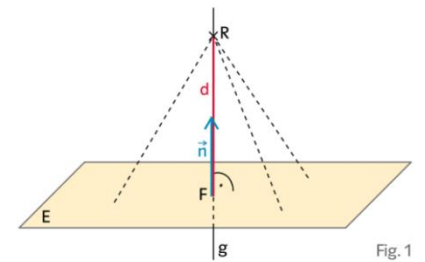
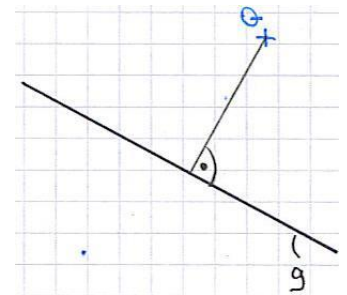


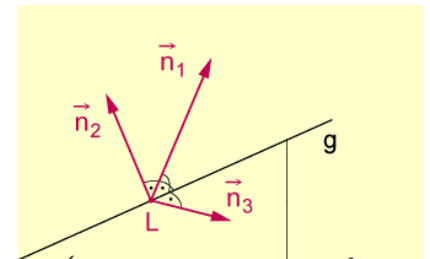
Fig. 1

Dieses Prinzip könnte man auch anwenden, um den Abstand von R zu einer Geraden g zu bestimmen. Im Zweidimensionalen funktioniert das auch problemlos (hier mit dem Punkt Q):



Im dreidimensionalen Raum scheitert das aber zunächst daran, dass es unendlich viele Vektoren mit unterschiedlichen Richtungen gibt, die orthogonal zu g sind, so sind in Fig.3 alle drei Vektoren $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ und $\vec{n}_3$ orthogonal zu g ; im Koordinatensystem ist sowohl die x_2 - als auch die x_3 -Achse orthogonal zur x_1 -Achse.

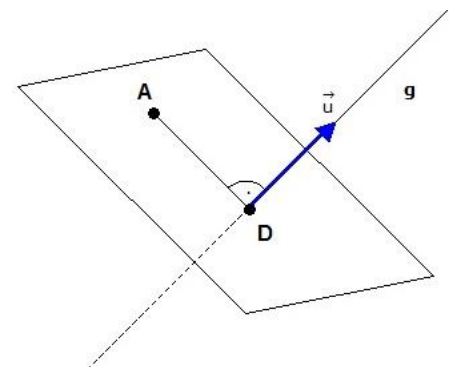
Daher könnten wir unendlich viele unterschiedliche Geraden durch unseren Punkt legen, deren Richtungsvektor orthogonal zu g ist. So finden wir unseren Fußpunkt F also nicht.



Deswegen gehen wir einen kleinen Umweg:

Wenn wir im folgenden Bild wüssten, wo der Punkt D liegt, könnten wir wie gewohnt den Abstand $d = |\overrightarrow{AD}|$ berechnen.

Also legen wir anstelle einer Geraden eine Hilfsebene H durch A , die orthogonal zu g ist – diese ist eindeutig bestimmt. D ist dann der Durchstoßpunkt von g und H .



Hier nochmal der vollständige Weg mit einem Beispiel:

geg.: Punkt R, Gerade g: $\vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{u}$	$R(5/1/1), \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$
1. Stelle eine Hilfsebene H auf, die durch R geht und orthogonal zu g ist. Wir verwenden dafür $\overrightarrow{OR}$ als Stützvektor und den Richtungsvektor der Geraden als Normalenvektor $\vec{u}$ von H.	$H: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = 0$ $\Rightarrow H: 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 13$
2. Berechne den Schnittpunkt F von g mit H (Lotfußpunkt).	$\Rightarrow 3 \cdot (-5 + 3t) + 2 \cdot (-5 + 2t) - 4 \cdot (5 - 4t) = 13$ $\Leftrightarrow -15 + 9t - 10 + 4t - 20 + 16t = 13$ $\Leftrightarrow -45 + 29t = 13 \quad \Leftrightarrow 29t = 58 \quad \Leftrightarrow t = 2$ t in g eingesetzt ergibt den Lotfußpunkt $F(1/-1/-3)$.
3. Berechne $d = \overrightarrow{RF} $.	$d = \sqrt{(1-5)^2 + (-1-1)^2 + (-3-1)^2}$ $d = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{36} = 6$

(gut erklärt auch wieder hier: <https://www.youtube.com/watch?v=ufzRqWEC9F0>)

Arbeitsauftrag:

1. Übernimm den Kasten auf S. 224 mit Überschrift ins (Regel-)Heft.
2. Bearbeite die folgenden Aufgaben: S.225, 1ab + 2ab + 3ab + 6